

多重 SLE/GFF 結合から動的ランダム行列理論へ

越田真史

(中央大学理工学部 koshida@phys.chuo-u.ac.jp)

L. Onsager による二次元イジング模型の厳密解の発見以来、臨界現象は統計物理学における中心的テーマの一つであり続てきた。このような「古典的な」テーマに対する、数学的なアプローチは、最近 20 年余りの間に著しい発展を遂げた。その背景に、必要な確率論の道具立てが整備されてきたということが挙げられる。

確率論とは、事象（イベント）がランダムに発生するような世界を解析する数学の分野で、事象の集まりと、それぞれの事象の発生確率が与えられた設定を基本の枠組みとする。統計物理学も、実現可能な全ての状態（＝事象）に対して、その重み（＝発生確率）を与える、というものである。自然に確率論の設定に落ち着くことになる。

臨界現象を研究するための、確率論の道具立てとして、シュラム・レヴナー発展 (Schramm–Loewner evolution; SLE) は、最も重要なものの一つである。これは、二次元臨界格子模型における、ドメイン壁の連続極限を記述することを目的に導入された、ランダム曲線である。ここにいう「ドメイン壁」とは、例えば、イジング模型の + スピンと - スピンの境界線のことを指す。SLE において画期的だったのは、二次元領域内のランダム曲線を境界（一次元）におけるランダムな点の運動、すなわち一次元確率過程で特徴づけるという点であった。しかも、ランダム曲線が臨界格子模型のドメイン壁を記述すると仮定すると、この一次元確率過程はブラウン運動に限られるのである。これにより、ランダム曲線の研究が、ブラウン運動という、よく知られた確率過程の研究に帰着したのである。

ところで、SLE は一本のランダム曲線を扱う。他方、格子模型に立ち返れば、複数のドメイン壁を同時に考える、というのは自然と思われる。こうした動機から、SLE を複数のランダム曲線を扱う場合へ一般化

したものは、多重 SLE とよばれる。

SLE において、一本のランダム曲線が、境界上の確率過程に対応したことの類似として、多重 SLE では、多重曲線が、境界上の多粒子確率過程に対応する。しかし、SLE の場合よりも状況は複雑である。多重 SLE に対しては、格子模型のドメイン壁を記述するという、物理的な仮定を課しても、境界上の確率過程に関する情報は何も得られないのである。では、多重 SLE を考えるにあたって、境界上の確率過程は何であるべきだろうか。

我々が着目したのは、近年盛んに研究されている、SLE と **ガウス自由場 (Gaussian free field; GFF)** との結合である。

GFF とは、質量のない自由ボーズ場の、確率論における別名である。GFF が定義された領域に、SLE に沿って切り込みを入れる操作を時間発展と考えることで、GFF の時間発展系が得られる。SLE/GFF 結合とは、この GFF の時間発展系がある種の定常性を示す現象のことを指す。これは、SLE が登場して以来、度々議論されてきた、「共形場理論との結合」の一例を与えている。

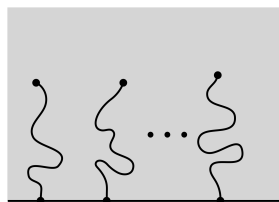
我々は、この SLE/GFF 結合を多重 SLE へ拡張しようと試みる中で、上記の問題への解答を得た。結論としては、多重 SLE と GFF の結合が成立するための条件として、境界上の確率過程が、**ダイソン模型**でなくてはならないのである。

ダイソン模型は、元々ランダム行列の動的拡張として導入されたもので、長距離相互作用する多粒子系の確率過程としては最もよく研究されている例の一つである。我々の結果は、このような動的ランダム行列理論に対して、多重 SLE と GFF の結合という新しい視点を提供しているものとも考えられる。

—Keywords—

シュラム・レヴナー発展 (SLE) :

穴のない二次元領域の、境界の二点をつなぐランダム曲線。一次元の境界上の確率過程によって、二次元領域内のランダム曲線の特徴づける。複数の曲線を記述できるように拡張したものは、多重 SLE とよばれる (下図)。



ガウス自由場 (GFF) :

質量のない自由ボーズ場の作用汎関数は $S[\varphi] = \int (\nabla \varphi)^2$ で与えられる。GFF とは、この作用汎関数についての経路積分に、数学的な意味付けを与えたものである。

ダイソン模型 :

対数ポテンシャルによる斥力相互作用をもつ、一次元多粒子確率過程である。ランダム行列の動的拡張を起源にもつ。

1. はじめに

シュラム・レヴナー発展 (Schramm–Loewner evolution; SLE) は、二次元での臨界イジング模型や臨界パーコレーションといった、臨界格子模型における、ドメイン壁の連続極限 (スケーリング極限) を記述するという動機の下、O. Schramm¹⁾ によって導入されたランダムな曲線の理論である。その導入以来、SLE の様々な性質や格子模型との関係が研究され²⁾、関連した業績により W. Werner (2006 年) と S. Smirnov (2010 年) がフィールズ賞を受賞した。特に、イジング模型やパーコレーションを含む様々な臨界格子模型において、そのドメイン壁が、連続極限において、SLE に収束することが証明されている^{3, 4)}。

さらに最近では、リウヴィル量子重力⁵⁾ や、曲率が虚数となる曲面を扱う幾何学 (虚幾何とよばれる)⁶⁾ においても SLE は重要な役割を果たすことが分かってきており、SLE の研究は新しい局面を迎えたようである。

臨界格子模型のドメイン壁の連続極限は、**(DMP) 領域マルコフ性** (domain Markov property, 後述) と **(CI) 共形不変性** (conformal invariance, 後述) を示すことが自然に期待される。O. Schramm¹⁾ は **(DMP)** と **(CI)** を満たすランダム曲線の分類を行い、これら二つの性質を満たすランダム曲線は、ブラウン運動で生成されると結論づけた。

本稿の主題は、多重 SLE とよばれる SLE の一般化である。SLE が一本のランダム曲線を記述するのに対し、多重 SLE は、文字通り複数のランダム曲線を記述する。格子模型において、複数のドメイン壁を同時に考える、ということ想像すれば、複数のランダム曲線を考えるというのは自然であろう。後で見るように、多重 SLE を分類する上では **(DMP)** と **(CI)** は十分な情報を与えない。筆者らは最近、このことにまつわる多重 SLE の問題に取り組んだので、その結果を紹介したい。

なお本稿の内容は香取眞理氏 (中央大学) との共同研究に基づく。また、香取氏には本稿の準備中にも多くの助言を頂いたので、ここに謝意を表す。

2. レヴナー理論

複素関数論の古典的な理論である、レヴナー理論を見るところから始めたい。基本となるのは、リーマンの写像定理である。複素平面 $\mathbb{C}$ 内の二つの開集合 D, D' がどちらも $\mathbb{C}$ 自体でなく、単連結 (穴がない) であるとする。このとき、局所的な角度を保つ¹⁾ 写像、すなわち共形変換 $f: D \rightarrow D'$ が存在する、というのがリーマンの写像定理の述べるところである。このような共形変換は一意ではなく、選び方の自由度は三つ残っている。したがって、例えば境界の三点の写る先を指定すると、一意にすることができる。

レヴナー理論で扱うのは、複素上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im} z > 0\}$ 内の単純曲線 (自分自身と交わらない連続曲線) であって、

¹⁾関数として正則であることと同値である。

原点から出発するものである。このような曲線は、 $\eta(0) = 0$ となる写像 $\eta: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$ を用いて表現される²⁾。すなわち、原点から出発して曲線に沿って歩いたとき、時刻 $t \geq 0$ での位置を $\eta(t)$ で表すのである。この写像 η を曲線のパラメタ付けとよぶ³⁾。また、パラメタ付け η が与えられた曲線を「曲線 η 」とよぶこともある。

さて、時刻 $t \geq 0$ までに歩いた軌跡を $\eta(0, t]$ で表すと、補集合 $\mathbb{H} \setminus \eta(0, t]$ は単連結である。そこで、 $\mathbb{H} \setminus \eta(0, t]$ と $\mathbb{H}$ の間にリーマンの写像定理を適用すると、共形変換 $g_t: \mathbb{H} \setminus \eta(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$ が存在することが分かる。このような g_t を一意に定めるためには、条件を三つ追加しなくてはいけない。そこで、流体力学的正規化、すなわち g_t の無限遠点周りでの展開 $g_t(z) = z + O(z^{-1})$ を課すことにしよう (これは確かに条件を三つ課している)。

レヴナー理論^{7, 8)} は、曲線 η に付随した共形変換の族⁴⁾ ($g_t: t \geq 0$) を微分方程式の解として特徴づける。すなわち、曲線のパラメタ付けをうまく選んだとき、($g_t: t \geq 0$) は次の微分方程式を満たす：任意の $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - X_t}, \quad t \geq 0, \quad g_0(z) = z. \quad (1)$$

ただし、各 $t \geq 0$ において、曲線の先端 $\eta(t)$ の g_t による像を X_t で表した。

式 (1) にある微分方程式は ($X = (X_t: t \geq 0)$ で駆動される) レヴナー方程式とよばれ、その解 ($g_t: t \geq 0$) は (X で駆動される) レヴナー鎖とよばれる。レヴナー理論の肝は、上半平面 $\mathbb{H}$ 内の単純曲線 η が、その境界 $\mathbb{R}$ 上の点の運動 X によって定まるということである (図 1)。

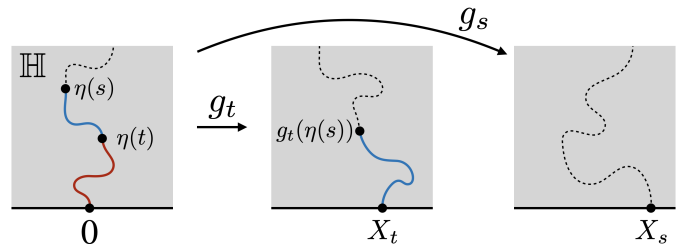


図 1 レヴナー理論における共形変換。二つの時刻 $s > t \geq 0$ における様子を描いた。例えば、 g_t は $\mathbb{H}$ から $\eta(0, t]$ を除いた領域を $\mathbb{H}$ に写像し、先端 $\eta(t)$ を境界の点 X_t に写す。

3. SLE

前項で紹介したレヴナー理論を曲線 η がランダムなときに考えたものが SLE である。曲線 η がランダムだとすると、境界の点の運動 $X = (X_t: t \geq 0)$ がランダムな運動、すなわち確率過程になることが分かるだろう。この場合、レヴナー鎖は (X に駆動される) 確率的レヴナー発展 (stochastic Loewner evolution; SLE) とよばれることがあるが、この

²⁾閉包を $\bar{\mathbb{H}}$ で表した。原点 0 は $\mathbb{H}$ に属していないことに注意。

³⁾曲線のパラメタ付けは一意ではなく、歩くスピードに依存する。

⁴⁾“a family of ...”を「...の族」と訳す。何らかの集合 (いまの場合 $[0, \infty)$) でラベルされたものの集まりをこのようにいう。

設定を初めに考えた O. Schramm の名をとって、シュラム・レヴナー発展 (Schramm–Loewner evolution; SLE) とよばれることの方が今日では多い⁵。

3.1. (DMP) 領域マルコフ性と (CI) 共形不変性

ここでは、既に言及した二つの性質 (DMP) と (CI) について述べたい。まず、 $\mathcal{C}$ を単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ と二つの境界点 $a, b \in \partial D$ の組 $(D; a, b)$ の集合とする⁶。各 $(D; a, b) \in \mathcal{C}$ に対して、 a から b に到る D 内のランダムな単純曲線の確率分布 $\mathbb{P}_{(D; a, b)}$ が与えられたとしよう。このとき、(DMP) と (CI) は確率分布の族 $\{\mathbb{P}_{(D; a, b)}\}_{(D; a, b) \in \mathcal{C}}$ の性質として述べられる。

任意の $(D; a, b)$ に対して、 $\eta: [0, \infty) \rightarrow \overline{D}$ を $\mathbb{P}_{(D; a, b)}$ に従うランダム曲線とする⁷。任意の $t \geq 0$ に対して、曲線の始めの部分 $\eta(0, t]$ を固定したとき、残りの部分 $\eta[t, \infty)$ の確率分布を考える (条件付き確率分布)。この残りの部分 $\eta[t, \infty)$ は、 $\eta(t)$ から b に到る、 $D \setminus \eta(0, t]$ 内の曲線であることに注意して欲しい。(DMP) とは、この残りの部分 $\eta[t, \infty)$ が $\mathbb{P}_{(D \setminus \eta(0, t]; \eta(t), b)}$ という確率分布に従うことを指す。すなわち、(DMP) を満たす確率分布の族に対しては、曲線の初め部分を与える条件付けと、領域に切れ込みを入れる操作が等価なのである (図 2)。ランダム曲線が、格子模型のドメイン壁の連続極限として得られるとすると、(DMP) は格子模型の相互作用が局所的であれば自然に期待される性質である。

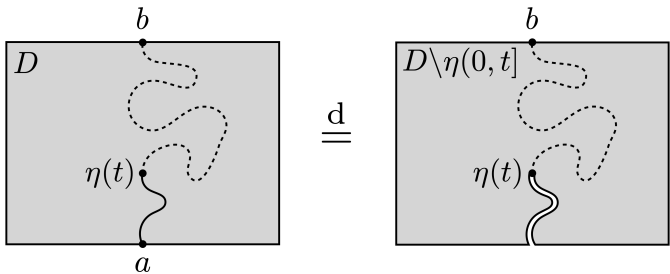


図 2 (DMP) 領域マルコフ性。左図の破線は、曲線の初め部分 $\eta(0, t]$ を与えたときの、残りの部分 $\eta[t, \infty)$ 。右図の破線は、領域自体を $D \setminus \eta(0, t]$ に変えたときのランダム曲線である。記号 $\stackrel{d}{=}$ は左右の確率分布が一致することを意味する。

次に、(CI) について述べよう。リーマンの写像定理を思い出すと、任意の $(D; a, b), (D'; a', b') \in \mathcal{C}$ に対して、共形変換 $f: D \rightarrow D'$ であって、 $f(a) = a', f(b) = b'$ となるものをとることができる (図 3)。このとき、領域 D 内で、 a から b に到る曲線 η の実現確率の測り方が二通り考えられる。一つは、 $\mathbb{P}_{(D; a, b)}$ で直接確率を測る方法だが、もう一つは、曲線 η を f によって D' に写した後、 $\mathbb{P}_{(D'; a', b')}$ によって確率を測る方法である。(CI) とは、この二つの確率の測り方が、同じ結果を与えるという性質を指す。(DMP) と

比べると、こちらはかなり非自明な性質なのだが、臨界系を特徴づける性質として受け入れられてきた。

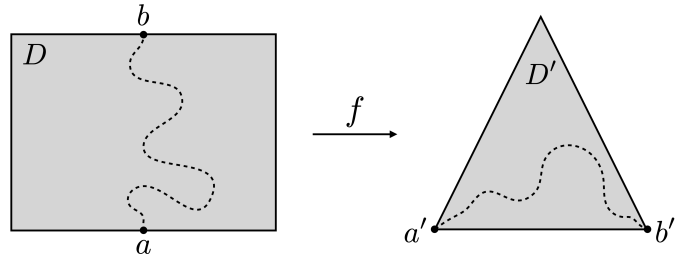


図 3 共形変換 $f: D \rightarrow D', f(a) = a', f(b) = b'$ 。左の領域内の曲線の実現確率を $\mathbb{P}_{(D; a, b)}$ で測るのと、右の領域に写して $\mathbb{P}_{(D'; a', b')}$ で測るのが等価である、というのが (CI) の内容である。

3.2. Schramm の原理

(DMP) と (CI) はランダム曲線が満たす条件として物理的に自然なものでありながら、数学的には極めて強い結果をもたらす。まず、(CI) から $\mathbb{P}_{(\mathbb{H}, 0, \infty)}$ が他の全ての確率分布を決定することに注意する。さらに、 $\mathbb{H}$ 内で 0 から ∞ に到るランダム曲線は、確率過程 $(X_t : t \geq 0)$ で駆動される SLE であることを思い出そう。

実は、(DMP) と (CI) が満たされるためには、この確率過程が、標準ブラウン運動 $(B_t : t \geq 0)$ と定数 $\kappa \geq 0$ を用いて $X_t = \sqrt{\kappa} B_t, t \geq 0$ と表されなくてはならないのである (Schramm の原理⁹)。証明は、やや複雑だが、最も重要なポイントは、いまの場合、任意の $(D; a, b)$ に対して、共形変換 $f: D \rightarrow \mathbb{H}$ であって、 $f(a) = 0, f(b) = \infty$ となるものが取れることである。リーマンの写像定理は三つまでなら条件を追加できたことを思い出して欲しい。次節にみる多重 SLE では、この性質が失われるのである。

ブラウン運動は、最も基本的な確率過程と言ってよいだろう。各実現が連続な運動をなし、増分が独立なガウス型確率変数となる、という性質で特徴づけられ、特にその分布関数は拡散方程式を満たす。「標準」とついているのは、拡散のスピード (拡散係数) を規格化していることを意味する。一方で、係数 $\sqrt{\kappa}$ をつけることで、 $\sqrt{\kappa} B_t$ は拡散係数 κ をもつ。冗長な書き方にも見えるが、拡散係数をあらわにするのに便利でもある。

4. 多重レヴナー理論

はじめにも述べたように、SLE が一本のランダム曲線を記述するのにに対し、多重 SLE は複数のランダム曲線を記述する。レヴナー理論は、多重曲線の場合へも自然に拡張される。すなわち、 $\mathbb{H}$ 内の N 本の単純曲線 $\eta^{(i)}: [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{H}}, i = 1, \dots, N$ に対して、図 4 にあるような共形変換の族 $(g_t : t \geq 0)$ は (パラメタ付けをうまく選んだ上で)、微分方程式

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \sum_{i=1}^N \frac{2}{g_t(z) - X_t^{(i)}}, \quad t \geq 0, \quad g_0(z) = z \quad (2)$$

⁵ 確率過程で駆動される微分方程式 (1) を確率的レヴナー方程式 (stochastic Loewner equation; SLE) とよぶこともある。

⁶ $(D; a, b)$ と $(D; b, a)$ は区別する。

⁷ ここでも、 $\overline{D}$ は D の閉包である。

を満たす⁹⁾。ここで、 i -番目の曲線の先端 $\eta^{(i)}(t)$ の g_t による像を $X_t^{(i)}$ と書いた。

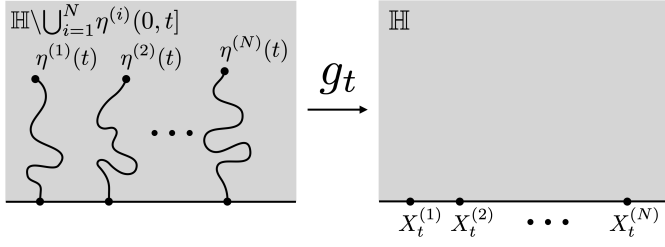


図 4: 多重レヴナー理論の共形変換。

我々は、この多重曲線がランダムである場合を考察したい。そのためには、各 $X^{(i)} = (X_t^{(i)} : t \geq 0)$ を確率過程に取り替えれば良い。このとき、解 $(g_t : t \geq 0)$ を $\mathbf{X} = (X^{(i)})_{i=1}^N$ で駆動される多重 SLE とよぼう。

ところで、曲線が一本の場合は (DMP) と (CI) を課すと駆動過程がブラウン運動であることが導かれたのであるが、これらの性質を多重曲線の場合に自然に拡張しても、駆動過程に関する有用な情報は得られない。その理由は、境界の点をいくつもとってしまうと、 $(D; a_1, a_2, \dots)$ と $(D'; a'_1, a'_2, \dots)$ に対して、共形変換 $f: D \rightarrow D', f(a_i) = a'_i$, $i = 1, 2, \dots$ が必ずしも存在しないということにある。

では、多重 SLE に対しては、どのような指針で駆動過程 $\mathbf{X}$ を選んだら良いであろうか。我々は近年盛んに研究されている、ガウス自由場 (Gaussian free field; GFF) と SLE の結合を多重 SLE に拡張することで、この問題に答えた。

5. GFF と SLE

GFF とは、質量のない自由ボーズ場の確率論における別名である。すなわち、作用汎関数 $S[\varphi] = \int_D (\nabla \varphi)^2$ による経路積分が数学的に意味をもち¹⁰⁾、そうして定まる自由ボーズ場を GFF とよぶのである。SLE と関係する文脈では、数学における GFF という呼び名が定着しているため、本稿でもそれに従うが、読者は必要に応じて、自由ボーズ場と読み替えてもよい。

さて、SLE/GFF 結合を説明するために、標準ブラウン運動 $(B_t : t \geq 0)$ と定数 $\kappa > 0$ をとり、 $(g_t : t \geq 0)$ を $(\sqrt{\kappa} B_t : t \geq 0)$ で駆動される SLE とする。また、各 $t \geq 0$ において、 $\mathbb{H}_t := g_t^{-1}(\mathbb{H})$ とおこう。これは、上半平面 $\mathbb{H}$ に、SLE の曲線に沿って切り込みを入れた領域と考えることができる⁸。天下りのだが、 $\chi = 2/\sqrt{\kappa} - \sqrt{\kappa}/2$ として、各 $t \geq 0$ において

$$\mathfrak{h}_t := -\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \arg(g_t(\cdot) - \sqrt{\kappa} B_t) - \chi \arg g'_t \quad (3)$$

という $\mathbb{H}_t$ 上の調和関数を考えよう。ここで、 $\arg$ は $(0, \pi)$ に値をとると規定する。また、 g'_t は $z \in \mathbb{H}_t$ に関する導関数

⁸切り込みを入れた後の、無限遠点 ∞ とつながっている連結成分、というのが正確である。

である。このとき、境界での値が $\mathfrak{h}_t$ に一致するという境界条件を与えた $\mathbb{H}_t$ 上の GFF を φ_t で表す。こうして、GFF の時間発展系 $(\varphi_t : t \geq 0)$ が得られた。

ここで「時間発展系」と呼んだことには注意が必要である。というのは、二次元領域上で GFF を考えるときは、この領域を $1+1$ 次元時空とみなすこともできるが、この意味での「物理的な時間」と、上記の「時間発展」は無関係である。ここでは「物理的な時間」とは無関係のパラメータによって、場の理論そのものが「時間発展」していることに注意して欲しい。

SLE/GFF 結合は、この GFF の時間発展系 $(\varphi_t : t \geq 0)$ の定常性として述べられる^{11, 12, 6)}：任意の $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{H}$ に対して、

$$\langle \varphi_t(z_1) \cdots \varphi_t(z_n) \rangle_t \stackrel{\text{d}}{=} \langle \varphi_0(z_1) \cdots \varphi_0(z_n) \rangle_0 \quad (4)$$

が、左辺が意味をもつ ($z_1, \dots, z_n \in \mathbb{H}_t$ であるような) $t \geq 0$ に対して成り立つ (図 5)。ここで、 $\langle \cdots \rangle_t$ は φ_t に関する期待値である。また、 $\stackrel{\text{d}}{=}$ は、SLE に由来するランダムネスに関して、確率分布が等しいことを表す。実は式 (4) は、SLE と共形場理論 (Conformal field theory; CFT) の結合とよばれる現象の一例を表している。(GFF は CFT であることに注意。)

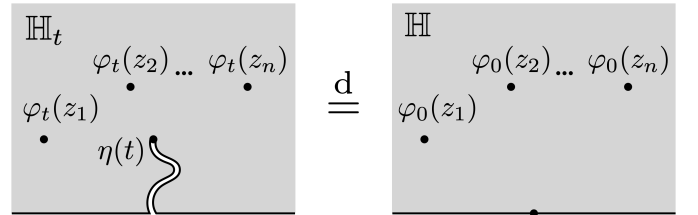


図 5 SLE/GFF 結合。左図では、SLE の曲線 η に沿って、切れ込みが入った領域での GFF φ_t を考える。右図は初期時刻での GFF φ_0 。この両者が、相関関数の意味で一致する。

6. 多重 SLE/GFF 結合、そしてダイソン模型

さて、式 (4) に表される SLE/GFF 現象を多重 SLE の場合に拡張しようとするのは自然な方向であろう。

この節では、 $(g_t : t \geq 0)$ は連続な確率過程 $\mathbf{X} = (X^{(i)})_{i=1}^N$ で駆動される多重 SLE とする。SLE の場合と同じように、各 $t \geq 0$ で $\mathbb{H}_t := g_t^{-1}(\mathbb{H})$ とする。

SLE の場合に用いられた GFF の境界条件は (3) で与えられていた。ここで、 $\arg$ 関数は $\mathbb{H}$ において、「1 点で値がジャンプする以外は定数」という境界条件を与えることに注意する。それでは、多重 SLE の場合のように境界に特別な点が複数ある場合は、次の調和関数が (3) の自然な拡張といえないだろうか：

$$\mathfrak{h}_t := -\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \arg(g_t(\cdot) - X_t^{(i)}) - \chi \arg g'_t. \quad (5)$$

ここで、 $\kappa > 0$, $\chi \in \mathbb{R}$ とした。境界での値が (5) に一致するような、 $\mathbb{H}_t$ 上の GFF を φ_t とおくと、SLE の場合と同じように、GFF の時間発展系 ($\varphi_t : t \geq 0$) が得られる。

我々は次のことを示した：

定理 6.1 (Katori–K.^{13, 14, 15}). 多重 SLE によって構成された GFF の時間発展系 ($\varphi_t : t \geq 0$) に対して、式 (4) が成り立つことは、次の条件と同値である：パラメタ間の関係式 $\chi = 2/\sqrt{\kappa} - \sqrt{\kappa}/2$ が成り立ち、駆動過程 X は次の確率微分方程式系⁹を満たす：

$$dX_t^{(i)} = \sqrt{\kappa} dB_t^{(i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{4dt}{X_t^{(i)} - X_t^{(j)}}, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

ここで、 $(B_t^{(i)} : t \geq 0)$, $i = 1, \dots, N$ は互いに独立な標準ブラウン運動である。

確率微分方程式系 (6) は、ダイソン模型¹⁶ とよばれる確率過程である。ダイソン模型はランダム行列の動的拡張として導入された確率過程で、多粒子の確率過程としては最もよく研究されているものの一つである¹⁷。式 (6) の右辺第 1 項はブラウン運動で、この部分は「自由粒子」としての拡散を表す。第 2 項が粒子間の相互作用を表すが、式 (6) は「運動方程式」なので、ここに現れる相互作用は「力」と考えられるべきである。したがって、ダイソン模型は対数ポテンシャルによる斥力相互作用をもつ粒子系と解釈される（斥力になっていることは各自で納得して欲しい）。

我々の問題は、多重 SLE の駆動過程として何を選ぶべきか、というものであったが、定理 6.1 が述べていることは、GFF との結合 (4) が成り立つことを要請すると、ダイソン模型が自然と選ばれるということである。このことは同時に、動的ランダム行列理論に対して、多重 SLE と GFF の結合を通して新しい視点を与えるものである。

7. おわりに

本稿で取り組んだ問題は、多重 SLE の駆動過程として何をとるべきか、というものであった。多重 SLE の駆動過程の選択については、M. Bauer ら¹⁸ と K. Graham¹⁹ による提案もある。それによると、駆動過程が、CFT の Belavin–Polyakov–Zamolodchikov 方程式の解を用いて定義されなくてはならないのだが、我々が見出したダイソン模型は、実際に彼らの提案の一例となっている。GFF は CFT の構成を与えるので、我々の議論は M. Bauer ら¹⁸ による議論を数学的に実現したものになっているのである。

SLE/GFF 結合の少し違うバージョンとして、GFF と逆行 SLE の結合も、リウヴィル量子重力と SLE の関係の文

脈で調べられている⁵。我々はこのバージョンの SLE/GFF 結合の多重 SLE への拡張をも議論した^{13, 20}。

SLE や多重 SLE は、領域が単連結の場合を扱うが、多重連結領域への SLE の拡張もいくつか試みがある^{21, 22}。特に、円環での SLE の拡張と GFF の結合が調べられ始めた²³。多重連結領域での SLE の拡張と GFF の結合の研究は今後の重要な方向性と思われる。とりわけ、多重 SLE を多重連結領域で定義して、GFF との結合を調べることで、ダイソン模型の自然な拡張のクラスを捉えられることが期待される。

参考文献

- 1) O. Schramm, Israel J. Math. **118**, 221 (2000).
- 2) 日本語で読める SLE の解説として、香取眞理, 日本物理学会誌 **61**, No. 7, 527 (2007), および、伊藤清 企画・監修 渡辺信三, 重川 一郎 編:『確率論ハンドブック』, 11.4 SLE(Schramm-Loewner evolution) 白井朋之, 香取眞理 (丸善, 2012) を挙げておく。
- 3) S. Smirnov, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **333**, 239 (2001).
- 4) D. Chelkak et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **352**, 157 (2014).
- 5) B. Duplantier, J. Miller and S. Sheffield, arXiv:1409.7055.
- 6) J. Miller and S. Sheffield, Probab. Theory Relat. Fields **164**, 553 (2016).
- 7) K. Löwner, Math. Ann., **89**, 103 (1923).
- 8) P. P. Kufarev, V. V. Sobolev, and L. V. Sporysheva, Trudy Tomsk. Gos. Univ. Ser. Meh.-Mat. **200**, 142 (1968).
- 9) O. Roth and S. Schleissinger, J. d'Anal. Math. **131**, 73 (2017).
- 10) GFF の数学的構成は非常に古典的な話題である。例えば、B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press (1979) の Introduction が標準的な文献である。
- 11) J. Dubédat, J. Amer. Math. Soc. **22**, 995 (2009).
- 12) O. Schramm and S. Sheffield, Probab. Theory Relat. Fields **157**, 47 (2013).
- 13) M. Katori and S. Koshida, J. Math. Phys. **61**, 083301 (2020).
- 14) M. Katori and S. Koshida, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics. arXiv:2001.03079.
- 15) M. Katori and S. Koshida, arXiv:2011.10291.
- 16) F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 1191 (1962).
- 17) 解説として、M. Katori, *Bessel Processes, Schramm–Loewner Evolution, and the Dyson Model*, SpringerBriefs in Mathematical Physics Vol. 11 (Springer 2015). がある。
- 18) M. Bauer, D. Bernard and K. Kytölä, J. Stat. Phys. **120**, 1125 (2005).
- 19) K. Graham, J. Stat. Mech. **2007**, P03008 (2007).
- 20) S. Koshida, to appear in Lett. Math. Phys. arXiv:1908.07180.
- 21) D. Zhan, Probab. Theory Relat. Fields **129**, 340 (2004).
- 22) Z.-Q. Chen and M. Fukushima, Stoch Process their Appl. **128**, 545 (2018).
- 23) S.-S. Byun, N.-G. Kang and H.-J. Tak, arXiv:1806.03638.

(2021 年 4 月 6 日原稿受付)

From multiple SLE/GFF-coupling to dynamical random matrix theory

Shinji Koshida

abstract: In this article, we describe our recent works on multiple Schramm–Loewner evolution (SLE). After recalling that the family of SLEs are characterized by the domain Markov property and the conformal invariance, we formulate our problem of choosing driving processes for a multiple SLE. We present our solution to this problem relying on the theory of coupling between SLE and Gaussian free field (GFF). Specifically, we discover that a multiple SLE is correctly coupled with a certain GFF if and only if the driving processes are given by the Dyson model.

⁹ ブラウン運動は時間微分ができないので、微分方程式を用いてダイナミクスを記述できない。代わりに、微小増分によってダイナミクスを記述する「微分方程式」を確率微分方程式とよぶ。